**Examen Extraordinario de Análisis de Variable Compleja**
**Cuarto curso de Matemáticas (Fundamental)**
**10 de diciembre de 1999**

1. Sean $f$ y $g$ dos funciones enteras cuya composición es constante. ¿Qué se puede afirmar sobre $f$ y $g$?.

2. Pruébese, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$ $(0<\varepsilon<R)$, que
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}$$
donde $\alpha$ es un parámetro real y $-1<\alpha<1$.

3. Integrando la función $f(z)=\dfrac{\log(i+z)}{1+z^2}$ a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,\mathrm{R})$, $0<\varepsilon<1<\mathrm{R}$, probar que
$$\int_0^{+\infty}\frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx=\pi\log 2.$$

4. Determinar el número de ceros del polinomio
$$P(z)=2z^5+4z-1$$
a) en el anillo $A(0;1,2)$;
b) en el semiplano de la derecha.

5. Construir un isomorfismo conforme del dominio
$$\Omega=\{z\in\mathbb{C}:|z-1|<1,\ |z-i|<1\}$$
sobre el disco unidad.